Quante partite si giocano complessivamente in un torneo a 7 squadre in cui sono previste

Vediamo l'andata:
dato che ogni squadra deve giocare con le altre 6 abbiamo

$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ incontri;

poi, visto che c'è anche il ritorno,
basta moltiplicare per 2, ottenendo in questo modo:

$2 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 42$ partite totali.

3) Quante diverse formazioni, ciascuna di 5 elementi, si possono mettere in campo se si hanno 8 elementi a disposizione? E se due di questi elementi non possono giocare insieme?

Per la prima parte è

$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 = 56$ possibili formazioni.

Per la seconda parte io ragionerei così:
chiamo A e B questi due giocatori che non possono giocare insieme.

Conto le formazioni che posso fare con A (ma ovviamente non con B):

$\binom{6}{4}$

in quanto devo scegliere i restanti 4 giocatori tra i 6 rimanenti (A è già stato selezionato, mentre B non può giocare insieme con A);
lo stesso discorso vale per B, ovviamente.
Quindi abbiamo per il momento

$2 \cdot \binom{6}{4}$ formazioni con A o B (la "o" va intesa nel senso di "aut aut").
Ora al conto mancano le formazioni in cui non compaiono né A né B:

$\binom{6}{5}$.

In definitiva abbiamo che il numero di possibili formazioni sotto i vincoli imposti è uguale a:

$2 \cdot \binom{6}{4} + \binom{6}{5} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} + 6 = 2 \cdot 15 + 6 = 36$.

A una gara partecipano 20 concorrenti. In quanti modi potrebbe essere formata la classifica finale dei 20 concorrenti?
Soluzione: Si tratta di permutare i 20 concorrenti, anche perché non è richiesto k. Per cui sarà P20=20! (Lasciamo il fattoriale perché sarebbe lungo - 18 cifre - scrivere il risultato numerico).

Calcolare quanti anagrammi (anche senza significato) si possono formare con le parole VITI, CASSA, ITALIA, NINNOLO.
Soluzione: Di tutti gli esercizi simili in cui si deve calcolare la permutazione per formare anagrammi, ho scelto questo perché è leggermente meno scemo. Infatti, qui si tratta di applicare le permutazioni con elementi non tutti distinti.
Viti: P(2)4=24/2=12. Cassa: P(2,2)5=120/4=30. Italia: P(2,2)6=720/4=180.
Ninnolo: P(3,1)7=5040/12=420.

In quanti modi diversi si possono sistemare in una fila di sedie 5 ragazzi e 6 ragazze, con la condizione che i ragazzi stiano tutti vicini tra loro così come anche le ragazze?
Soluzione: Si tratta di un prodotto fra due permutazioni semplici, una riferita ai 5 ragazzi e l'altra alle 6 ragazze; per cui abbiamo P5*P6 = 5!*6! = 120*720 = 86.400.

Esercizio 1. *Quanti sono i numeri di 6 cifre con almeno una cifra pari? E quelli con almeno una cifra dispari?*

Risoluzione. Come spesso succede, conviene contare i numeri di 6 cifre e sottrarre quelli che hanno solo cifre dispari o solo cifre pari, ottenendo il risultato cercato in maniera indiretta.

I numeri di 6 cifre sono chiaramente 900 000 (da 100 000 a 999 999), ma vogliamo contarli usando le tecniche del calcolo combinatorio: si tratta di riempire 6 caselline, in cui conta l'ordine, con le cifre dallo 0 al 9. Poichè al primo posto non ci può essere uno 0, ci sono solo 9 possibilità; nelle altre cinque caselline ci sono invece 10 possibilità; in totale $9 \times 10^5 = 900\,000$, come previsto.

Nello stesso modo contiamo i numeri che hanno solo cifre pari: 4 possibilità al primo posto (le cifre 2, 4, 6, 8), 5 possibilità nelle altre 5 caselline (le cifre di prima più lo 0): in totale 4×5^6 numeri. I numeri che hanno solo cifre dispari sono invece 5^5 (le cifre disponibili sono ora 1, 3, 5, 7, 9 in tutte le 6 caselline).

1. Contare le terne ordinate formate con le lettere A,B,C,D. (Le ripetizioni sono ammesse)

1) Si tratta delle disposizioni (perché conta l'ordine !) con ripetizione di 4 elementi , presi a tre a tre cioè $D_{4,3}^{(Rip)} = 4^3$

2. Una carta geografica contiene 5 paesi. La si vuole colorare (ogni paese con un colore diverso) , avendo a disposizione sette diversi colori. In quanti modi si può fare ?

2) Si hanno sette colori , da usare 5 per volta (uno per ciascun diverso paese) (non sono ammesse ripetizioni dei colori e ovviamente conta l'ordine con cui si usano)
Dunque si tratta di disposizioni semplici di sette elementi da prendere a cinque a cinque , cioè
$$D_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Esercizio 2. *Si devono disporre su una fila di 10 sedie cinque coppie uomo-donna. In quanto modi la disposizione può essere fatta con una delle seguenti condizioni?*

1. *Alla rinfusa.*
2. *Mantenendo tutti gli uomini e tutte le donne vicini tra loro.*
3. *Mantenendo unite le coppie presenti.*

Risoluzione. Se la disposizione può essere fatta alla rinfusa ci sono chiaramente 10! possibilità: le disposizioni di 10 persone in 10 posti.

Se devo mantenere i gruppi di uomini e di donne uniti posso scegliere, in $2! = 2$ modi, come disporre i gruppi; successivamente ho 5! possibilità di permutare i maschi e 5! possibilità di permutare le femmine, in totale $2! \times 5! \times 5!$ possibilità.

Se infine ho già le coppie costituite e queste devono rimanere unite, ci sono 5! possibilità per sistemare le coppie (nelle cinque coppie di sedie vicine) e 2! possibilità di permutare ciascuna coppia; in totale $5! \times 5 \times 2!$ possibilità. □

Esercizio 3. *In una classe di 22 studenti, di cui 12 femmine e 10 maschi, si deve formare un gruppo di ricerca con 3 maschi e 3 femmine. In quanti modi la cosa si può fare se nei 10 maschi ci sono 2 gemelli e non si vuole che siano assieme nel gruppo?*

Risoluzione. Senza restrizioni la risposta sarebbe $C_{12,3} \cdot C_{10,3} = 24\,640$. Per la scelta delle femmine il numero $C_{12,3}$ rimane corretto. Per la scelta dei maschi basterà che togliamo da $C_{10,3}$ il numero delle terne in cui ci sono i due gemelli assieme: si tratta di 8 terne, in quanto se una terna deve contenere i due gemelli, per il suo completamento potrò scegliere uno degli altri 8 studenti maschi. Dunque

$$C_{12,3} \cdot (C_{10,3} - 8) = \binom{12}{3} \cdot \left(\binom{10}{3} - 8\right) = 24640\,.$$

Per contare le possibili scelte dei maschi avrei anche potuto ragionare in un altro modo: posso contare le terne formate senza i due gemelli, che sono $C_{8,3}$, poi le terne con il primo gemello soltanto, che sono $C_{8,2}$ e quelle con il secondo gemello soltanto, che sono ancora $C_{8,2}$, ottenendo lo stesso risultato. □

3. In quanti modi diversi sette amici possono viaggiare su un'auto che ha solo cinque posti? E se solo uno di essi ha la patente ?

3) Sono le combinazioni (poiché non conta l'ordine con cui gli amici entrano in macchina) di sette elementi da prendere a cinque a cinque ,cioè :

$$C_{7,5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{7-5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Se uno solo ha la patente , questi<u>deve</u> salire in macchina ; quindi restano quattro posti , e sei amici.

Dunque in questo caso , le possibilità sono

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{6-4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Il signor Rossi ha sei amici , A, B, C, D, E, F. Decide di visitarli tutti nei prossimi tre giorni, al ritmo di due al giorno . Quante possibilità ci sono ? Se vuole visitare A il primo giorno , a quante si riducono le possibilità ?

4) Il primo giorno il sig. Rossi ha $C_{6,2} = \binom{6}{2} = 15$ possibili scelte .

Il secondo giorno ha solo più $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ scelte.

Il terzo giorno ne ha solo più una (d'altronde $C_{2,2} = \binom{2}{2} = 1$).

Dunque in tutto ha $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$ possibilità.
Se A viene visitato il primo giorno , allora :
il 1° giorno ha solo 5 scelte
il 2° giorno ha $C_{4,2} = 6$ scelte
il 3° giorno ha solo 1 scelta
Dunque ha $5 \cdot 6 \cdot 1 = 30$ possibili scelte .